Integración - Cuadratura

Métodos numéricos para estimar el valor de una integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Donde el intervalo de integración [a ,b] es **finito**, y $\boldsymbol{f} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$, **continua** en [$a$, b].

Según el teorema Fundamental del Cálculo, para una función f con las características indicadas, existe una antiderivada (o primitiva) F de f en [a ,b], es decir, F es una función analítica tal que:

$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, e $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Métodos analíticos

El problema al usar los métodos analíticos de integración es que, es posible que ***F*** no se pueda expresar en términos de funciones elementales, o aunque ***F*** se conozca explícitamente, ésta no se pueda evaluar fácilmente. En otros casos se desconoce la función ***f*** y solo se tiene una tabla de puntos.

Ejemplos de tales integrales son:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^5}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \qquad \int_1^5 e^{-x^2}dx$$

Algunos de los métodos de integración numérica se basan en la aproximación de la función ***f*** mediante polinomios interpolantes.

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Se divide el intervalo [a, b] en n sub-intervalos de igual longitud $[x_0, x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_k,x_{k+1}],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, donde los $n+1$ puntos $x_0,x_1,\ldots, x_n$ se obtienen a partir de la fórmula $x_k= a+k*h$, $k = 0, 1, \ldots, n,$ siendo $\boldsymbol{h} = (b-a)/n$ el **tamaño de paso** $\Rightarrow x_0 = a$, $x_n = b$, y $h = x_{k+1}-x_k$

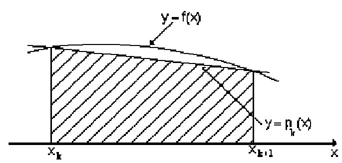
Si $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange para la función f en los nodos $x_0, x_1,\ldots,x_n$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\int_a^b L_j(x)\,dx$$

si $\quad A_j = \int_a^b L_j(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x)$

Regla de los Trapecios

La función ***f*** se aproxima en cada sub-intervalo $[x_k ,x_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots, n-1$, mediante un polinomio de interpolación lineal de Lagrange $p_k(x)$, usando los nodos x_k y x_{k+1} .



El polinomio de interpolación de Lagrange es:

$$p_x(x) = f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Entonces $\int_x^{x+1} f(x)dx \approx \int_x^{x+1} p_k(x)dx$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right] dx$$

$$= f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\,dx + f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\,dx$$

$$= \left. f(x_k)\frac{(x-x_{k+1})^2}{2(x_k-x_{k+1})} + f(x_{k+1})\frac{(x-x_k)^2}{2(x_{k+1}-x_k)}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= f(x_{k+1})\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2(x_{k+1}-x_k)} - f(x_k)\frac{(x_k-x_{k+1})^2}{2(x_k-x_{k+1})}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{\substack{\text{ancho}\\ h}}\underbrace{\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}}_{\text{altura promedio}}}_{\text{Fórmula de la superficie de un trapecio}}$$

Si $\boldsymbol{h} = x_{k+1} - x_k$ $\quad \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h[f(x_k)+f(x_{k+1})]}{2}$

Si h es un Sub-intervalo de $[a,b]$ $\quad \displaystyle I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h[f(x_k)+f(x_{k+1})]}{2}$

Para n =cantidad sub-intervalos,

- Si $\boldsymbol{n} = \mathbf{1} \Rightarrow h = b-a$, la fórmula se reduce a:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]}$$

Esta fórmula se conoce como **regla simple de los Trapecios**.

- Si $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$ la fórmula se conoce como: **regla compuesta de los Trapecios**.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]}$$

Error local en la regla de Trapecios

El **error local** (en 1 trapecio) al aproximar $f(x)$ mediante $p_k(x)$, es:

$$E(x) = f(x) - p_k(x) = \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{2!} f''(\xi_k(x)) \quad \text{Por error interpolación de Lagrange}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} E(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx = \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{2!} f''(\xi_k(x))\right]dx$$

Donde $\xi_k(x)$ es un número que depende de x y $\xi_k(x) \in (x_k, x_{k+1})$

$$E_k \le \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k(x))(x-x_k)(x-x_{k+1}) \quad \text{si } \xi_k(x) \,/\, f''(\xi_k(x)) \text{ máx en } [x_{k+1}-x_k]$$

$$= \frac{f''(\xi_k(x))}{2}\left(\left.\frac{x^3}{3} - (x_k+x_{k+1})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+1} x\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{f''(\xi_k(x))}{2}\left(\frac{x_{k+1}^3 - x_k^3}{3} - (x_k+x_{k+1})\frac{x_{k+1}^2 - x_k^2}{2} + x_k x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\right) =$$

$$= \frac{f''(\xi_k(x))}{12}(x_{k+1}-x_k)^3 = \boxed{-\frac{h^3}{12} f''(\xi_k(x)) \therefore O(h^3)} \quad \text{para } h = x_{k+1}-x_k$$

Error global en la regla de los Trapecios

El **error global o total** que se comete al aplicar la regla compuesta de los Trapecios sobre todo el intervalo [a,b], es:

$$E_T = \sum_{k=0}^{n-1} E_k = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k(x)) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k(x))$$

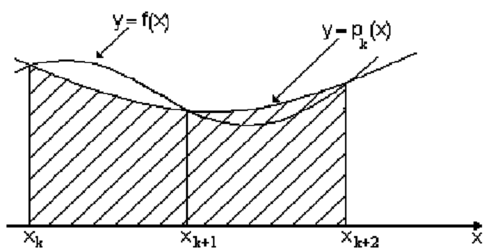
$$= -\frac{h^3}{12} n f''(\xi(x)) \underset{h=\frac{b-a}{n}}{=} -h^2\frac{b-a}{12} f''(\xi(x)) \quad \text{para algún } \xi \in (a,b)$$

Si $|f''(x)| \le L$ para toda $x \in [a,b]$

$$|E_T| = h^2\frac{(b-a)}{12}|f''(\xi(x))| \le \boxed{\underbrace{h^2\frac{(b-a)}{12}L}_{O(h^2)}}$$

Regla de Simpson 1/3

Se aproxima la función ***f*** en cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+2}]$, $k = 0, 2, \ldots, n - 2$, mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2}.



En este caso, el número de sub-intervalos n **debe ser par**.

El polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1} y x_{k+2}, es

$$p_k(x) = f(x_k)\frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} + f(x_{k+1})\frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} + $$
$$+ f(x_{k+2})\frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_{k+1} + x_{k+2})\frac{x^2}{2} + x_{k+1}x_{k+2}x\right) +$$
$$+ \frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+2})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+2}x\right) +$$
$$+ \left.\frac{f(x_{k+2})}{(x_{k+2} - x_k)(x_k - x_{k+1})}\left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+1}x\right)\right]_{x_k}^{x_{k+2}}$$

Regla simple de Simpson 1/3

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+2} - x_k)}_{ancho}\underbrace{\frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6}}_{altura\ promedio}$$
$$= 2h\frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6}$$
$$= \frac{h}{3}\left[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})\right]$$

como $h = \frac{b-a}{2}$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Regla compuesta de Simpson 1/3

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx \frac{h}{3}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots$$
$$\cdots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right\}}$$

Con $n = 2*m$, $m \geq 2$ entero

Error de la regla de Simpson 1/3

Error local $\boxed{E_k = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k)}$ $\boxed{= O(h^5)}$

Error global

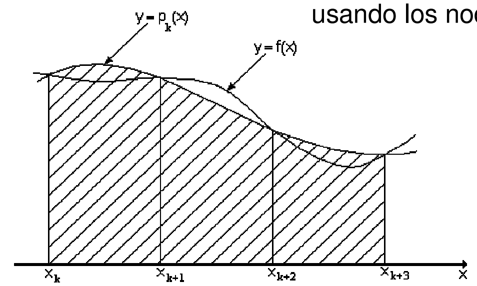
$$E_T = \sum_{k=0,2,\cdots,n-2} E_k = \sum_{k=0:2}^{n-2}\left(-\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k)\right), \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+2})$$

$$= -\frac{h^5}{90}\sum_{k=0:2}^{n-2} f^{(iv)}(\xi) = -\frac{h^5}{90}\left(\frac{n-2}{2}+1\right) f^{(iv)}(\xi)$$

$$= -h^5\left(\frac{n}{180}\right) f^{(iv)}(\xi) = \boxed{h^4\,\frac{b-a}{180} f^{(iv)}(\xi),} \quad \xi \in (a,b), \quad \boxed{O(h^4)}$$

Regla de Simpson 3/8

Se puede interpolar la función ***f*** en cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+3}]$, $k = 0, 3, \ldots, n-3$ (lo que requiere que n sea un entero positivo múltiplo de 3) mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que tres, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}



Regla simple de Simpson 3/8

$$\int_{x_k}^{x_{k+3}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+3}-x_k)}_{\text{ancho}}\underbrace{\left[\frac{f(x_k)+3f(x_{k+1})+3f(x_{k+2})+f(x_{k+3})}{8}\right]}_{\text{altura promedio}}$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_k)+3f(x_{k+1})+3f(x_{k+2})+f(x_{k+3})\right]$$

Si $n = 3 \Rightarrow h = (b-a)/3$, la fórmula se reduce a:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$$

$$\boxed{= \frac{(b-a)}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]}$$

Regla compuesta de Simpson 3/8

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{3h}{8}\{[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]+[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]+\cdots$$

$$\cdots+[f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)]\}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left\{f(a)+f(b)+3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+1})+3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+2})+2\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k})\right\}}$$

Con $n = 3*m$, $m \geq 3$ entero

Error regla Simpson 3/8

Error local

$$E_k = \boxed{\underbrace{-\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi_k)}_{O(h^5)}} \quad , \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+3}), \quad k = 0,3,\ldots,n-3$$

Error total

$$E_T = \sum_{k=0,3,\cdots,n-3} E_k = \sum_{k=0:3}^{n-3} \left(-\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi_k) \right), \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+3})$$

$$= -\frac{3h^5}{80} \sum_{k=0:3}^{n-3} f^{(iv)}(\xi_k) = -\frac{3h^5}{80} \left(\frac{n-3}{3} + 1 \right) f^{(iv)}(\xi)$$

$$= -h^5 \left(\frac{n}{80} \right) f^{(iv)}(\xi) = \boxed{-h^4 \frac{b-a}{80} f^{(iv)}(\xi)}, \quad \xi \in (a,b), \quad O(h^4)$$

Ejemplo

$$\int \mathrm{sen}^2(x) = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}(x) * \cos(x)}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}^2(x)dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.307092424\ldots$$

Caso simple: i) n = 1 para trapecios, ii) n = 2 para Simpson 1/3, iii) n = 3 para Simpson 3/8

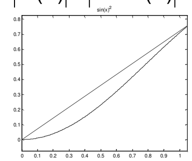
i) Trapecios

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}^2(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{\pi}{6}\left[\mathrm{sen}^2(0) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 0.3926991$$

Error $\quad E_T = -\frac{h^3}{3} f''(\xi) \text{ con } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) = \mathrm{sen}(2x), \quad f''(x) = 2\cos(2x), \quad |f''(x)| = |2\cos(x)| < 2$$

$$|E_T| = \frac{h^3}{12}|f''(\xi)| \le \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{12} 2 \approx 0.19$$



Error real = |.3926991-.3070924| = .0856...≈ 0.1

ii) Simpson 1/3

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}^2(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\mathrm{sen}^2(0) + 4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 0.3054326$$

Error

$$E_T = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \text{ para algún } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\left|f^{iv}(x)\right| = |-8\cos(2x)| < 8 \quad \Rightarrow |E_T| = -\frac{h^5}{90}\left|f^{(iv)}(\xi)\right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{90} 8 \approx 3.5 * 10^{-3}$$

Error real =|.3070924 - .3054326| = 0.0016... ≈ 0.002

iii) Simpson 3/8

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}^2(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{\pi}{24}\left[\mathrm{sen}^2(0) + 3\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + 3\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 0.3063656$$

Error

$$E_T = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi) \text{ para algún } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\left|f^{iv}(x)\right| = |-8\cos(2x)| < 8 \Rightarrow |E_T| = -\frac{3h^5}{80}\left|f^{(iv)}(\xi)\right| \le \frac{3\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{80} 8 \approx 1.6 * 10^{-3}$$

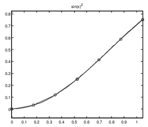
Error real =|.3070924 - .3063656| = 0.0007... ≈ 0.001

Caso compuesto: n = 6 $\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{18}$

6 trapecios

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{\pi}{18},\quad x_2=\frac{\pi}{9},\quad x_3=\frac{\pi}{6},\quad x_4=\frac{2\pi}{9},\quad x_5=\frac{5\pi}{18},\quad x_6=\frac{\pi}{3}$$

i) Trapecios



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}^2(x)dx\approx\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{5}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{\pi}{36}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\left[f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{2\pi}{9}\right)+f\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right]\right\}$$

$$=0.3092953$$

Error global

$$E_T=-\frac{h^3}{12}nf''(\xi)=-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}6f''(\xi)\Rightarrow|E_T|\le-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}(6)(2)=\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\approx5.3*10^{-3}$$

Error real =|.3070924 - .3092953| = 2.1... x 10^{-3}

Caso compuesto: n = 6 , 3 Simpson 1/3

ii) Simpson 1/3

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}^2(x)dx\approx\frac{h}{3}\sum_{k=0,2,4}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})\right]$$

$$=\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+f(x_6)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)\right]\right\}$$

$$=0.3070743$$

Error global

$$E_T=-\frac{h^5}{180}nf^{(iv)}(\xi)=-\frac{h^5}{180}6f^{(iv)}(\xi)=-\frac{h^5}{30}f^{(iv)}(\xi)$$

$$|E_T|\le\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{30}8\approx4.3*10^{-5}$$

Error real =|.3070924 - .3070743| = 1.8...x10 $^{-3}$

Caso compuesto: n = 6, 2 Simpson 3/8

iii) Simpson 3/8

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}^2(x)dx\approx\frac{3h}{8}\sum_{k=0,3}\left[f(x_k)+3f(x_{k+1})+3f(x_{k+2})+f(x_{k+3})\right]$$

$$=\frac{3h}{8}\left\{f(x_0)+f(x_6)+3\left[f(x_1)+f(x_4)\right]+3\left[f(x_2)+f(x_5)\right]+2f(x_3)\right\}$$

$$=0.3070510$$

Error global

$$E_T=-\frac{h^5}{80}nf^{(iv)}(\xi)=-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{80}6f^{(iv)}(\xi)$$

$$|E_T|\le\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{80}(6)(8)\approx9.7*10^{-5}$$

Error real =|.3070924 - .3070510| = 4.1... x 10 $^{-5}$

Integración de Romberg

- Se obtiene una estimación del valor de una integral definida con base en dos o más aplicaciones de una fórmula como la de los Trapecios (o Simpson), empleando diferentes tamaños de intervalo.
- La estimación es mejorada al combinarse con el proceso de extrapolación de Richardson.

Si se aplica la regla de los Trapecios sucesivamente para tamaños de intervalo h_k:

$$h_1=b-a\quad(m_1=2^0\text{ sub - intervalos}),$$

$$h_2=\frac{h_1}{2}=\frac{b-a}{2}\quad(m_2=2^1\text{ sub - intervalos}),$$

$$h_3=\frac{h_2}{2}=\frac{b-a}{2^2}\quad(m_3=2^2\text{ sub - intervalos}),\cdots,$$

$$h_k=\frac{h_{k-1}}{2}=\frac{b-a}{2^{k-1}}\quad(m_k=2^{k-1}\text{ sub - intervalos})$$

Requiere conocer la función o disponer de $n=m_k+1=(2^{k-1}+1)$ puntos

Fórmula recursiva de Romberg para trapecios

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a+ih_k)\right]}_{R_{k,1}}$$

Regla compuesta Trapecios

$$R_{1,1} = \frac{\overset{=b-a}{h_1}}{2}\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$ (1 solo trapecio)

$$R_{2,1} = \frac{\overset{=(b-a)/2=\,h_1/2}{h_2}}{2}\left[f(a)+f(b)+2f(a+h_2)\right] = \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)+2f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}_{R_{1,1}} + (b-a)f\left(a+\frac{1}{2}(b-a)\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1}+h_1 f\left(a+\frac{1}{2}h_1\right)\right]$$

(2 trapecios)

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{2,1}+h_2\left[f\left(a+\frac{h_2}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h_2}{2}\right)\right]\right\}$$ (4 trapecios)

$$\boxed{R_{k,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{k-1,1}+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a+\frac{2i-1}{2}h_{k-1}\right)\right\}}$$ (2^{k-1} trapecios)

Ejemplo

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \ln(3) = 1.0986128...$$

$$R_{1,1} = \frac{3-1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} \approx 1.3333...$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+(3-1)\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{6} \approx 1.166667$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{6}+\frac{3-1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}+\frac{16}{15}\right) = \frac{1}{2}\frac{67}{60} \approx 1.116667$$

Las aproximaciones $R_{k,1}$ van acercándose al valor exacto de la integral, pero lentamente.
Por medio de la ***Extrapolación de Richardson*** se puede **acelerar la convergencia**

Extrapolación de Richardson

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{T(f,h_k)}^{R_k} + E_T(f,h_k), \quad E_T = O(h_k^2) = Ch_k^2 \quad (1)$$

para R_{k+1} con $h_{k+1}=h_k/2$

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{T(f,h_{k+1})}^{R_{k+1}} + E_T(f,h_{k+1}), \quad E_T = O({h_{k+1}}^2) = Ch_{k+1}^2 = C\frac{h_k^2}{4} \quad (2)$$

Multiplicando (2) por 4 y restándole (1) se elimina un término del error

$$\underbrace{4(R_{k+1}+C\frac{h_k^2}{4})}_{4\int_a^b f(x)dx} - \underbrace{(R_k+Ch_k^2)}_{\int_a^b f(x)dx} = 3\int_a^b f(x)dx = 4R_{k+1}-R_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{4R_{k,1}-R_{k-1,1}}{3}}$$

En general $\boxed{R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1}-R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}}$

Para cada i=1,2,...,n y j=2,...,i, Con error asociado $O(h_j^{2j})$

$$\begin{array}{ccccccccc}
R_{1,1} & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
R_{2,1} & \to & R_{2,2} & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
R_{3,1} & \to & R_{3,2} & \to & R_{3,3} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vdots & \to & \cdots & \to & \cdots & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
R_{n,1} & \to & R_{n,2} & \to & R_{n,3} & \to & \cdots & \to & R_{n,n}
\end{array}$$

El resultado mejora en el sentido de las flechas
Los $R_{i,1}$ coinciden con los resultados de i trapecios, los $R_{i,2}$ coinciden con los resultados de Simpson 1/3, los $R_{i,3}$ coinciden con los resultados de Boole (integración a partir de 4 puntos)

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1}-R_{1,1}}{3} = \frac{4\left(\frac{7}{6}\right)-\frac{4}{3}}{3} = \frac{10}{9} \approx 1.11111$$

$$R_{3,2} = \frac{4R_{3,1}-R_{2,1}}{3} = \frac{4\left(\frac{67}{60}\right)-\frac{7}{6}}{3} = \frac{198}{180} \approx 1.1$$

$$R_{3,3} = \frac{4^{3-1}R_{3,2}-R_{2,2}}{4^{3-1}-1} = \frac{16\left(\frac{198}{180}\right)-\frac{10}{9}}{15} = \frac{1584-100}{1350} \approx 1.099259$$

El procedimiento termina cuando, dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, se satisface $|R_{k-1,k}-R_{k,k}| < \varepsilon$

Integración adaptativa

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{S(f,h_k)+E_T(f,h_k)}^{R_k}, \quad E_T = O(h_k^4) = Ch_k^4 \qquad (1)$$

$$h_{k+1}=h_k/2$$

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{S(f,h_{k+1})+E_T(f,h_{k+1})}^{R_{k+1}}, \quad E_T = O({h_{k+1}}^4) = Ch_{k+1}^4 = C\frac{h_k^4}{16} \qquad (2)$$

Multiplicando (2) por 16 y restándole (1) se elimina un término del error

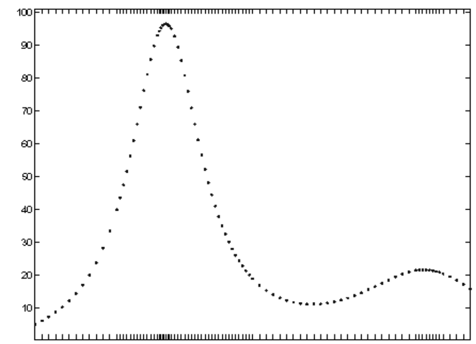
$$\underbrace{16(R_{k+1}+C\frac{h_k^4}{16})}_{R_{k+1}} - \underbrace{(R_k + Ch_k^4)}_{R_k} = 15\int_a^b f(x)dx = 16R_{k+1}-R_k$$

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \frac{\mathbf{16R_{k,1}-R_{k-1,1}}}{\mathbf{15}}}$$

Se aplica el ajuste sólo en los intervalos donde no se obtiene la aproximación requerida

Gráfico generado por integración adaptativa

quad('humps',0,1,1.e-4,1)



Comandos Matlab

T = trapz(y): Calcula la integral por la regla de los trapecios, **y** es un vector y **T** es la integral con un intervalo unitario ∴ el resultado final será **T*h.**

T = cumtrapz(y): Igual que **trapz**, pero devuelve los valores acumulados de los trapecios, **T**=[t_1,t_1+t_2, t_1+t_2+t_3, ...].

Q = quad('F',a,b,tol,graf): Calcula la integral de **'F'** entre **a** y **b** por integración adaptativa, **F** debe estar definida como función y la expresión debe utilizar operadores vectoriales (.*, .^, . /), si **graf** es distinto de 0 grafica los puntos que va utilizando para aproximar la integral.